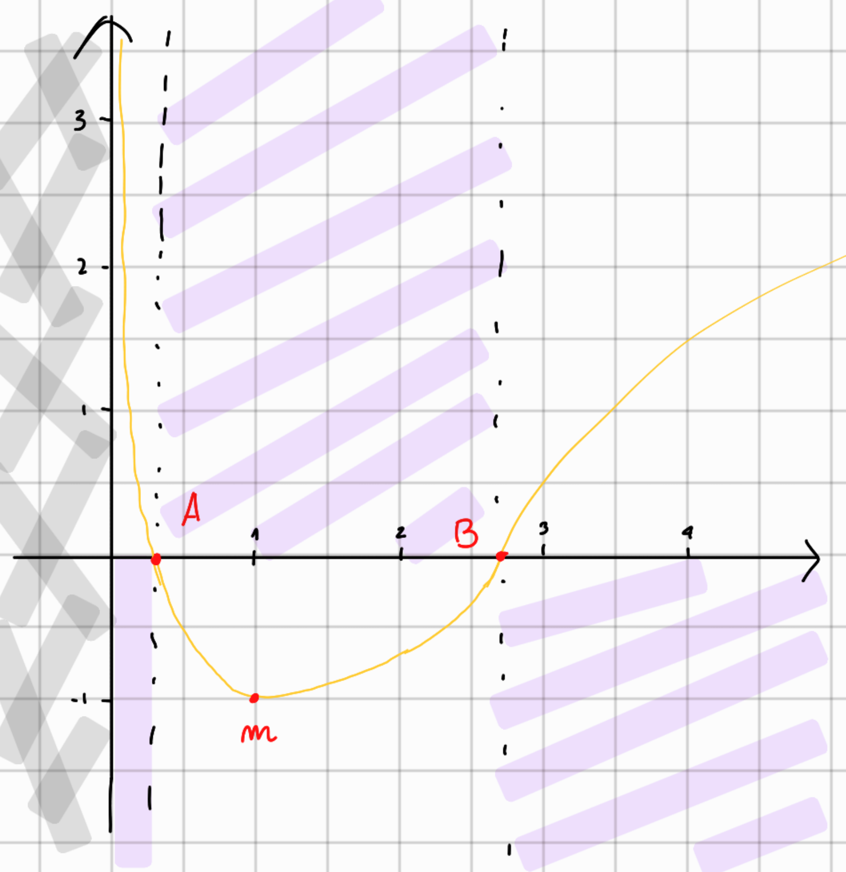
ESAME DI MATEMATICA E STATISTICA (DISPARI) 14/02/24

ESERCIZIO 1

$$f(x) = \ln^2 x - 1$$

DOMINIO

C.E. $x > 0 \rightarrow D = (0, +\infty)$



- STUDIO DEL SEGNO E INTERSEZIONE ASSE X

$$\ln^2(x) - 1 \geq 0$$

$$t^2 - 1 \geq 0$$

$$t \leq -1 \vee t \geq 1$$

$$\ln x \leq -1 \quad \vee \quad \ln x \geq 1$$

$$x \leq e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \vee \quad x \geq e$$

f è POSITIVA PER $x \in (0, e) \cup (\frac{1}{e}, +\infty)$

f è NEGATIVA PER $x \in (e, \frac{1}{e})$

f SI ANNULLA PER $x = \frac{1}{e}$; $x = e$

$A = (e^{-1}, 0)$; $B = (e, 0)$

- $0 \notin D \Rightarrow$ NO INTERSEZIONE ASSE y
- LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO E ASINTOTI

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln(x))^2 - 1 = (-\infty)^2 = +\infty$$ ASINTOTO VERTICALE SINISTRO

$$\lim_{x \to +\infty} \ln^2(x) - 1 = (+\infty)^2 = +\infty \Rightarrow$$ NO A. ORIZZONTALE

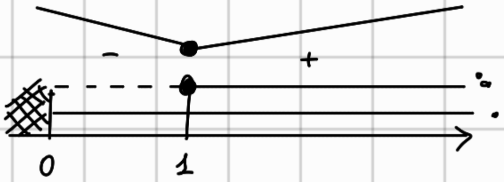
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2(x) - 1}{x} \overset{D\text{-}H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{1} = 0 \Rightarrow$$ NO A. OBLIQUO

(PER AVERE L'A.OBLIQUO QUESTO LIMITE DEVE ESSERE $m \neq 0$)

- DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{2\ln x}{x} \geq 0$$

STUDIO IL SEGNO PER CAPIRE DOVE LA FUNZIONE CRESCE/DECRESCE



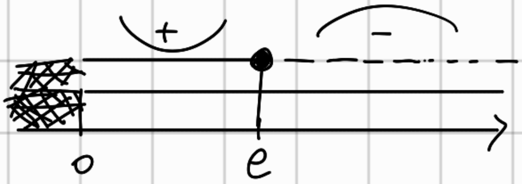
$\cdot\ x > 0$ $\forall x \in D$	$:\ 2\ln x \geq 0$ $\ln x \geq 0$ $x \geq e^0 = 1$	f è DECRESCENTE PER $x \in (0,1)$ f è CRESCENTE PER $x \in (1,+\infty)$ f è STAZIONARIA PER $x = 1$ $m = (1,-1)$ P.TO DI MINIMO

- DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - 2\ln x}{x^2} = \frac{2(1-\ln x)}{x^2} \geq 0$$

STUDIO IL SEGNO PER CAPIRE LA CONCAVITÀ DI f.

$2(1-\ln x) \geq 0$ $1-\ln x \geq 0$ $-\ln x \geq -1$ $\ln x \leq 1$ $x \leq e$	$x^2 > 0$ $\forall x \in D$	



f CONVESSA PER $x \in (0,e)$

f CONCAVA PER $x \in (e,+\infty)$

f PRESENTA UN FLESSO PER $x = e$

$F \equiv B = (e,0)$

P.TO DI FLESSO

---

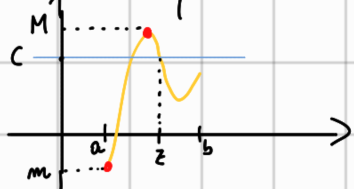
b. $f'(e) = \frac{2\ln e}{e} = \frac{2}{e} \simeq 0.73$

È UN VALORE POSITIVO PERTANTO IN $x = e$ LA FUNZIONE È CRESCENTE E LA RETTA TANGENTE AVRÀ UN'INCLINAZIONE $m = 2/e$

---

c. Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione CONTINUA in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato, allora f assume tutti i valori compresi tra il suo massimo e il suo minimo assoluto.

SE $c \in [m,M] \Rightarrow \exists z \in [a,b]$ t.c. $f(z) = c$



ESERCIZIO 2

a. $$\int 2x\cos x\,dx = 2\int \underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\cos x}_{f'}\,dx = 2\Big[\underbrace{x}_{g}\,\underbrace{\sin x}_{f} - \int \underbrace{\sin x}_{-g'f}\,dx\Big] = 2\big[x\sin x + \cos x\big] + C$$

PER PARTI

$g' = 1 \qquad f = \sin x$

b. $$\int_{\pi/2}^{\pi} 2x\cos x\,dx = 2\big[x\sin x + \cos x\big]\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\Big[\pi\underbrace{\sin\pi}_{0} + \underbrace{\cos\pi}_{-1} - \frac{\pi}{2}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}\Big]$$

$$= 2\Big[-1 - \frac{\pi}{2}\Big] = -2 - \pi = -(\pi + 2)$$

c. Data $f(x)$ funzione, una primitiva $F(x)$ è una funzione tale che la sua derivata coincide con $f(x)$, cioè $\boxed{F'(x) = f(x)}$

ESERCIZIO 3

$$s(\lambda) = 4e^{\lambda - \lambda^2}$$

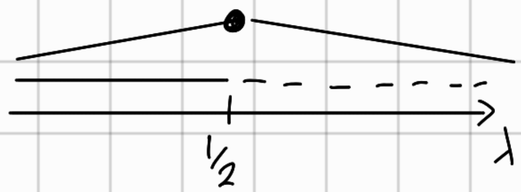
PER TROVARE IL P.TO DI MASSIMO CERCO DOVE SI ANNULLA LA DERIVATA PRIMA

$$s'(\lambda) = 4(1 - 2\lambda)e^{\lambda - \lambda^2} = 0 \qquad 4(1 - 2\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\lambda = \frac{1}{2}} \qquad \Big|\qquad e^{\lambda - \lambda^2} = 0 \text{ MAI}$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO

CONTROLLO IL SEGNO DELLA DERIVATA $s'(\lambda) \geq 0$

$$\begin{array}{l|l} 4(1-2\lambda) \geq 0 & e^{\lambda-\lambda^2} \geq 0 \\ -2\lambda \geq -1 & \forall \lambda \\ \lambda \leq \frac{1}{2} & \end{array} \Rightarrow$$



$\lambda = \frac{1}{2}$ è P.TO DI MASSIMO

Il dispositivo è maggiormente sensibile alla luce con lunghezza d'onda $\lambda = 0.5\,\mu m$

la sensibilità massima è pari a $s\left(\frac{1}{2}\right) = 4e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 4e^{\frac{1}{4}} = 4\sqrt[4]{e} \simeq 5.14$

ESERCIZIO 4 $X = \{-1.3, -2, 0.5, 0.8, -3, -2.2\}$

$H_0: \mu = 0$ (l'integratore non fa niente)

$H_1: \mu \neq 0$ (l'integratore influisce sul peso)

$$\bar{x} = \frac{1}{6}\left(-1.3 - 2 + 0.5 + 0.8 - 3 - 2.2\right) = -1.2$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{5}\left[(-1.3+1.2)^2 + (-2+1.2)^2 + (0.5+1.2)^2 + (0.8+1.2)^2 + (-3+1.2)^2 + (-2.2-1.2)^2\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}\left((-0.1)^2 + (-0.8)^2 + (1.7)^2 + 2^2 + (-1.8)^2 + (1)^2\right.} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5}\left(0.01 + 0.64 + 2.89 + 4 + 3.24 + 1\right)} = \sqrt{\frac{1}{5}(11.78)} = \sqrt{2.356} \simeq 1.53$$

$$|t_5^*| = \frac{|0+1.2|}{1.53}\sqrt{6} \simeq 1.915 < 2.015$$

$$\Downarrow$$

Dobbiamo accettare H_0 pertanto i dati non possono affermare che l'integratore funzioni per nessun livello di significatività.

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{10}\left(50 + 38 + 71 + 22 + 44 + 32 + 81 + 98 + 11 + 8\right) = \frac{455}{10} = 45.5$$

PER LA MEDIANA RIORDINO I DATI 8 11 22 32 $\boxed{38 \quad 44}$ 50 71 81 98

$$\text{mediana}(y_1) = \frac{38+44}{2} = 41$$

Ci aspettiamo che la varianza maggiore sia quella di Y_1 in quanto ci sono dati molto più lontani dal valore medio (es. 8, 11, 81, 98) che non sono presenti in Y_2 dove tutti i dati sono concentrati tra 36 e 53.